Carpeta de Matemática 8

Nueva edición
ampliada y actualizada

CUADERNILLO 3

Nueva carpeta de Matemática II

Ruth Schaposchnik (coord.)
Luis Garaventa - Nora Legorburu
Patricia Rodas - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

3. Ángulos y construcciones 3
Revisión inicial 4
Circunferencia y lugar geométrico 5
Posiciones relativas de dos circunferencias 6
Mediatriz de un segmento 7
Bisectriz de un ángulo 8
Pares de ángulos especiales 10
Pares de ángulos que se forman al cortar dos rectas paralelas con una secante 12
Ángulos en el triángulo 15
Los ángulos interiores 15
Los ángulos exteriores 16
Rectas y circunferencias 19
Ángulos en la circunferencia 21
Construcciones posibles y construcciones imposibles 23
En el mundo real 25
Origami y medición de ángulos 25
Más actividades 27
Autoevaluación 30
Actividades integradoras 31

EJEMPLAR DE PROMOCIÓN

PROHIBIDA SU VENTA Y SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

AIQUE

Este CUADERNILLO 3 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática II.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Teresita Valdettaro

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Nora Legorburu

COPIEDICIÓN
Maricel Besse

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Inés Gugliotella

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Daniel Balado
Gabriel Lauría
Silvana López
Estudio DOBLEVUELO

ILUSTRACIONES
Alejandra Lunik
Diego Molina
Diego Stigliano

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Gustavo Delupi en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Valentín Gómez 3530 (C1191AAP)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
I.S.B.N. 978-987-06-0059-6
Primera edición

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Nueva carpeta de matemática II / Luis Garaventa...[et.al.]. ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2007.
256 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0059-6

1. Matemática-Enseñanza Media. I. Schaposchnik, Ruth, coord.
CDD 510.712

Esta edición se terminó de imprimir en enero de 2007 en Morello S. A., Víctor Martínez 1881, Ciudad de Buenos Aires.

3 ÁNGULOS Y CONSTRUCCIONES

Al estudiar en profundidad el espacio físico que habitamos, necesitamos analizar minuciosamente cada una de las formas más simples que lo componen; entre ellas, los *ángulos*. Ciertas *construcciones básicas* nos permiten concebir la perfección de las figuras geométricas elementales.

En numerosas obras de arte podemos apreciar cómo los artistas recurren permanentemente a las figuras geométricas que hacen que sus cuadros luzcan agradables a nuestros ojos.

Observen la obra de Manuel Mampaso. Dentro de la imprecisión de los trazos de la imagen, intenten descubrir:

- rectas paralelas;
- ángulos iguales;
- relaciones entre ambos.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

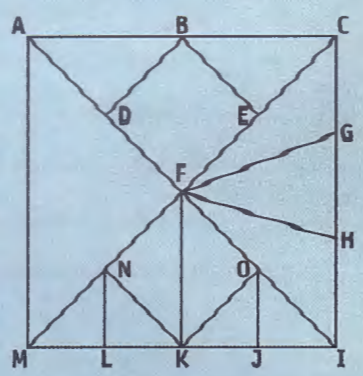
REVISIÓN INICIAL

1 Completen el cuadro.

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\hat{\alpha} - \hat{\beta}$	$3 \cdot \hat{\alpha}$	$\hat{\beta} : 2$
80° 15'	50°				
	20°	60° 20' 50"			
				60° 30'	9°

2 Señalen en la siguiente figura y anoten en la tabla.

Un par de ángulos...		Un par de segmentos...	
consecutivos		paralelos	
opuestos por el vértice		perpendiculares	
complementarios		consecutivos	
adyacentes		no paralelos	
congruentes		no perpendiculares	
suplementarios		no paralelos y no perpendiculares	



3 Considerando que $\hat{\alpha} = 28° 46'$ y $\hat{\beta} = 66° 29''$, completen la siguiente tabla:

$2(\hat{\beta} - \hat{\alpha})$	complemento de $\hat{\beta}$	suplemento de $(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$	suplemento de $\hat{\beta} + \hat{\alpha}$

4 Los ángulos β y ε son opuestos por el vértice y $\hat{\varepsilon} = 36°$.

a) ¿Cuánto mide el $\hat{\beta}$?

b) ¿Cuánto mide el $\hat{\pi}$ que es adyacente al $\hat{\beta}$?

c) Realicen una figura de análisis ubicando en ella los ángulos β, ε y π.

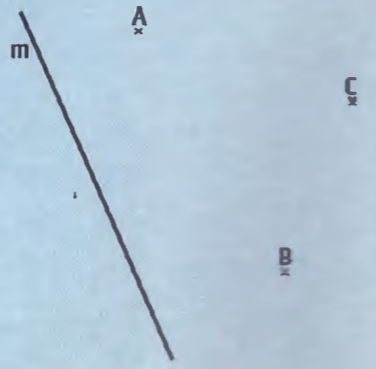
5 Utilicen una regla y una escuadra y realicen los trazados pedidos en la figura.

a) La recta *n* perpendicular a *m* que pasa por A.

b) La recta *t* paralela a *m* que contiene a B.

c) La recta *r* paralela a AB que contiene a C.

d) La recta *l* perpendicular a *r* que pasa por B.



© Aique Grupo Editor S.A. Prohibida su reproducción.

Circunferencia y lugar geométrico

6 Consideren el punto O que figura a continuación.

x O

a) Marquen dos puntos alineados, P y Q, que estén a 2 cm de distancia de O.

b) Marquen otro punto, R, no alineado con P y con Q, que también esté a 2 cm de distancia de O.

c) Marquen todos los puntos que estén a 2 cm de distancia de O. ¿Qué figura obtuvieron?

d) Pinten de azul todos los puntos que están a menos de 2 cm de O.

e) Pinten de rojo todos los puntos que están a más de 2 cm de O.

Para observar

- Una figura es el *lugar geométrico* de los puntos del plano que cumplen con una propiedad determinada, si todos los puntos que cumplen con esa propiedad pertenecen a la figura.
- Una *circunferencia* de centro O y radio *r* es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia *r* de otro punto O llamado *centro*.
- Un *círculo* de centro O y radio *r* es el lugar geométrico de los puntos que se hallan a una distancia menor o igual que *r* del centro O.

7 Tracen en sus carpetas un segmento AB de 7 cm.

a) Si con centro en A se traza una circunferencia de 3 cm de radio, y con centro en B se traza otra circunferencia de 2 cm de radio, ¿se cortan ambas circunferencias? ¿Por qué?

.....

b) Verifiquen su respuesta anterior gráficamente.

c) ¿Cuál debería ser la medida del radio de cada una de las circunferencias para que se corten en dos puntos?

.....

d) ¿Cuál debería ser el radio de cada una de las circunferencias para que se intersequen en un único punto?

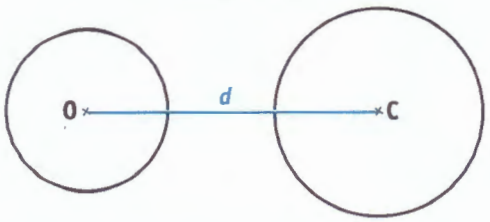
.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Posiciones relativas de dos circunferencias

8 Vamos a analizar las diferentes *posiciones relativas* que pueden tener dos circunferencias. Como ejemplo, tomamos dos circunferencias cuyos radios son $r_1 = 1$ cm, y $r_2 = 1{,}5$ cm, y llamamos d a la distancia entre sus centros. En cada caso, midan d y completen lo pedido, como en el ejemplo.

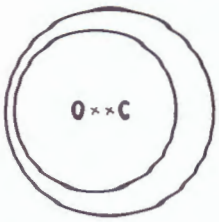
Exteriores



d es *mayor* que la suma de los radios.

$d > r_1 + r_2$

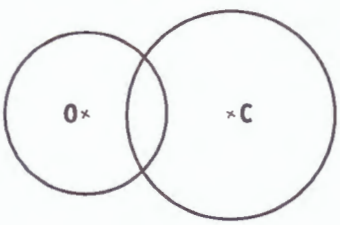
Interiores



d es ..... que la diferencia entre los radios y ..... que cero.

d .....

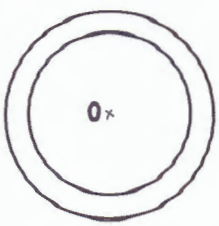
Secantes



d es ..... que la suma de sus radios y ..... que la diferencia entre ellos.

d .....

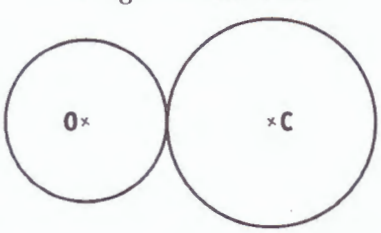
Concéntricas



d es ..... a cero.

d .....

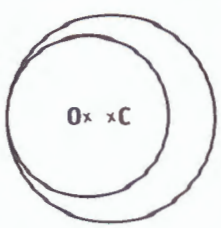
Tangentes exteriores



d es ..... a la suma de los radios.

d .....

Tangentes interiores



d es ..... a la diferencia entre los radios y ..... que cero.

d .....

9 Indiquen cuál es la posición relativa de dos circunferencias de 6 cm y 10 cm de diámetro, respectivamente, si sus centros están ubicados a 9 cm de distancia.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Mediatriz de un segmento

10 Utilicen el recuadro de color para llevar a cabo las construcciones que se indican a continuación y contesten a las preguntas.

a) Tracen un segmento AB de 5 cm en el centro del recuadro aproximadamente.

b) Con centro en A y en B, respectivamente, construyan un par de circunferencias secantes de igual radio y marquen con rojo los puntos comunes a ambas circunferencias.

c) ¿A qué distancia de A y de B se hallan los puntos rojos?

.....

d) Repitan el paso **b)** dos veces más, variando la medida del radio.

e) Unan todos los puntos rojos con una línea.

f) ¿Qué característica comparten los puntos pertenecientes a la línea que trazaron?

.....

g) ¿Cuánto debería medir el radio de las circunferencias trazadas para que estas resulten tangentes? Verifíquenlo trazando un par de circunferencias tangentes en un punto M.

h) ¿Qué particularidad tiene el punto M respecto del segmento AB?

.....

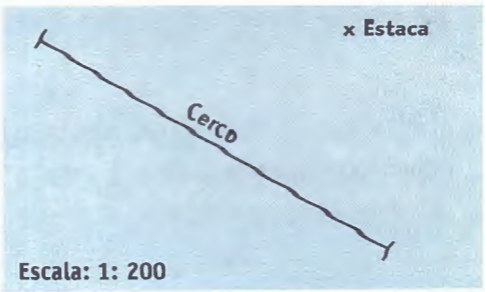
Para recordar

- La *mediatriz* de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento; por lo tanto, todos los puntos de la mediatriz se encuentran a la misma distancia de los extremos del segmento.
- La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Bisectriz de un ángulo

11 ¿Cuál es la mayor longitud que puede tener la correa para que al sujetar a un perro de la estaca no llegue a tocar el cerco? ¿Cómo lo pensaron?



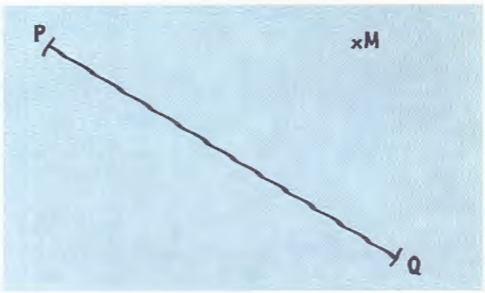
12 Observen el segmento $\overline{PQ}$ y el punto M de la figura.

a) ¿A qué distancia de $\overline{PQ}$ se halla M?

.....

.....

b) Marquen un punto N que esté a 3 cm de $\overline{PQ}$. ¿Cuántas posibilidades hay para ubicar a N?



.....

.....

13 Observen el ángulo MON de la figura.

a) Marquen un punto Q que esté a la misma distancia de $\overline{MO}$ que de $\overline{ON}$.

b) Marquen otros tres puntos que cumplan esa condición.

c) ¿Cómo podrían ubicar todos los puntos que están a igual distancia de cada lado del ángulo?

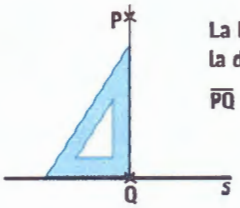
.....

.....

.....

Para leer y recordar

La *distancia* de un punto a una recta es la longitud del menor segmento que pueda trazarse entre el punto y la recta. Gráficamente pueden comprobar que este segmento está incluido en la perpendicular a la recta que contiene al punto.



La longitud de $\overline{PQ}$ es la distancia de P a *s*.

$\overline{PQ} \perp s$

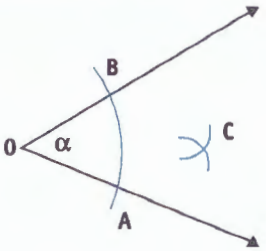
- **La *bisectriz* de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo.**
- **La bisectriz de un ángulo es una semirrecta que divide al ángulo en dos ángulos iguales.**

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

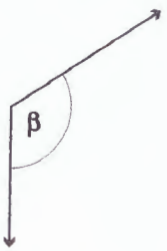
Para observar

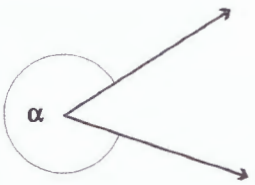
Observen cómo trazamos la bisectriz del ángulo α.

- **Con centro en O y un radio cualquiera, trazamos un arco de circunferencia que corte a los lados del ángulo en los puntos A y B.**
- **Con centro en A, trazamos un arco cualquiera, y con el mismo radio pero con centro en el punto B, trazamos otro arco que corte al anterior en el punto C.**
- **Trazamos la semirrecta que pasa por los puntos C y O, que es la bisectriz del ángulo α.**



14 Tracen la bisectriz de cada uno de estos ángulos.





15 Dibujen un ángulo $S\hat{O}T$ de 127° y divídanlo en cuatro ángulos iguales utilizando compás y regla.

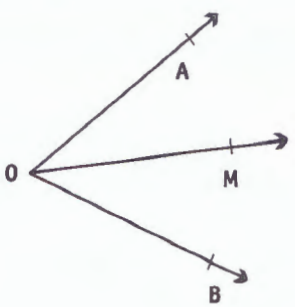
16 Dibujen el segmento $\overline{PQ}$ de 5,8 cm y divídanlo en cuatro partes iguales utilizando compás y regla.

17 Averigüen la amplitud del $A\hat{O}B$ y el valor de x sabiendo que $A\hat{O}M = 49°$, $\overrightarrow{OM}$ es la bisectriz del $A\hat{O}B$ y $M\hat{O}B = 2\hat{x} + 15°$

.....

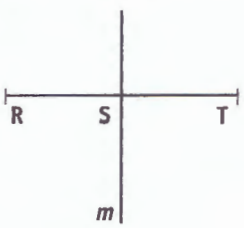
.....

.....



18 Dibujen el segmento $\overline{AB}$ de 6 cm de longitud; determinen su punto medio y llámenlo M. Construyan la mediatriz del segmento $\overline{AM}$. Con el vértice en B, dibujen un ángulo $A\hat{O}B$ de 73° y tracen su bisectriz. Llamen N al punto de intersección entre la bisectriz y la mediatriz trazadas. Midan la distancia de N a $\overline{AB}$.

19 Hallen la medida del segmento $\overline{RT}$, sabiendo que m es mediatriz del segmento y que $\overline{RS} = (9x - 22)$ cm y $\overline{RT} = (4x + 12)$ cm.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Pares de ángulos especiales

20 Indiquen cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles, falsas. En caso de ser verdaderas, ejemplifiquen la situación con un gráfico, y en caso de ser falsas, presenten un contraejemplo.

a) Dos ángulos consecutivos son siempre suplementarios.

b) Dos ángulos opuestos por el vértice no pueden ser suplementarios.

c) Dos ángulos opuestos por el vértice no siempre son iguales.

d) Dos ángulos adyacentes son siempre suplementarios.

e) Dos ángulos suplementarios son siempre adyacentes.

21 Encuentren en la figura y mencionen un par de ángulos según lo pedido en cada caso.

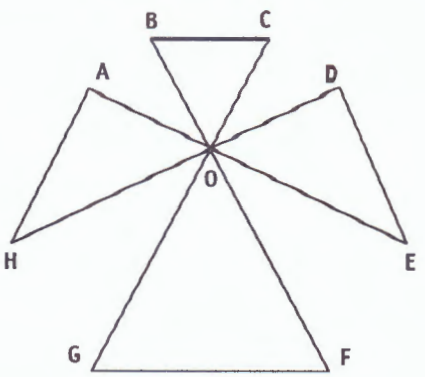
a) Complementarios .....

b) Consecutivos .....

c) Adyacentes .....

d) Opuestos por el vértice .....

e) Suplementarios .....



22 Indiquen cuál o cuáles de las siguientes igualdades expresan que $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son complementarios.

a) $\hat{A} + \hat{B} = 90°$ b) $\hat{A} = \hat{B} + 90°$ c) $\hat{A} = 90° - \hat{B}$ d) $\hat{B} = 90° + \hat{A}$ e) $\hat{B} = 90° - \hat{A}$

.....

23 Indiquen cuál o cuáles de las siguientes igualdades expresan que $\hat{C}$ y $\hat{D}$ son suplementarios.

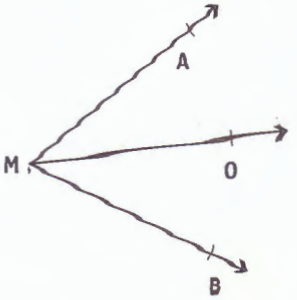
a) $\hat{D} = 180° + \hat{C}$ b) $\hat{C} + \hat{D} = 180°$ c) $\hat{D} = 180° - \hat{C}$ d) $\hat{C} = \hat{D} + 180°$ e) $\hat{C} = 180° - \hat{D}$

.....

24 Calculen la medida de un suplemento del $A\hat{M}B$ sabiendo que $\overrightarrow{MO}$ es bisectriz de $A\hat{M}B$, que $A\hat{M}O = 4\hat{x} - 29°$ y $O\hat{M}B = \hat{x} + 19°$.

.....

.....



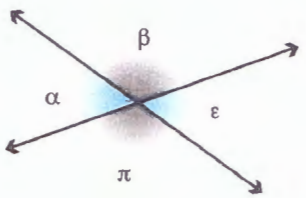
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Para observar

- Para interpretar algunas situaciones problemáticas, muchas veces es útil hacer un "borrador" de la figura y volcar en ella los datos del problema. A esta figura la llamamos *figura de análisis*, y no es necesario que tenga medidas exactas.

Veamos un ejemplo:

Al cruzarse dos rectas se determinan los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ adyacentes, y los ángulos $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\pi}$, de modo que $\hat{\varepsilon}$ es opuesto por el vértice a $\hat{\alpha}$.
¿Es cierto que $\hat{\pi}$ y $\hat{\beta}$ miden lo mismo?
Al volcar los datos en la figura de análisis de la situación, nos damos cuenta de que $\hat{\pi}$ y $\hat{\beta}$ efectivamente miden lo mismo, porque son opuestos por el vértice.



25 Completen la frase en cada caso con *a veces*, *siempre* o *nunca*, según corresponda.

a) Dos ángulos suplementarios ..... son adyacentes.

b) Dos ángulos adyacentes ..... son consecutivos.

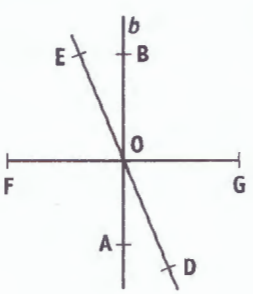
c) Dos ángulos consecutivos ..... son adyacentes.

d) Dos ángulos adyacentes iguales ..... son llanos.

e) Dos ángulos opuestos por el vértice ..... son complementarios.

f) Dos ángulos opuestos por el vértice suplementarios ..... son rectos.

26 En la figura, *b* es la mediatriz del $\overline{FG}$ y $F\hat{O}D = 5\ E\hat{O}B - 10°$. Calculen la medida del $G\hat{O}D$. Justifiquen los procedimientos que realicen para llegar al resultado.



27 La diferencia entre dos ángulos complementarios es de 15° 10'. Calculen la medida de cada uno de ellos.

28 Hallen la medida de dos ángulos suplementarios sabiendo que uno de ellos es igual a las tres quintas partes del otro.

29 Las dos terceras partes del complemento de $\hat{\beta}$ es un ángulo de 20°.

a) Indiquen cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones sirven para calcular $\hat{\beta}$.

I. $\frac{2}{3} \cdot 90° - \hat{\beta} = 20°$

II. $90° - \hat{\beta} = 20° \cdot \frac{3}{2}$

III. $\frac{2}{3} \cdot (90° - \hat{\beta}) = 20°$

IV. $90° - \hat{\beta} = 20° \cdot \frac{2}{3}$

b) Hallen la medida de $\hat{\beta}$ y la de su complemento.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Pares de ángulos que se forman al cortar dos rectas paralelas con una secante

30 Observen el gráfico y resuelvan.

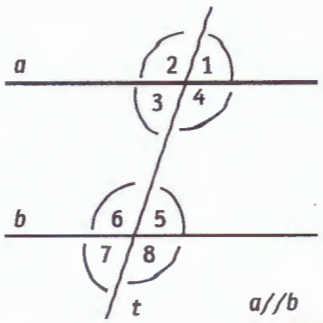
a) Encuentren los ángulos que se piden a continuación.

I. Los ángulos que son iguales entre si .....

II. Los pares de ángulos adyacentes .....

III. Los ángulos agudos .....

IV. Los ángulos obtusos .....



a // b
t secante

b) Completen la tabla con los pares de ángulos que se indican y su propiedad.

Clasificación	Nombre de los ángulos	Propiedad: son siempre...
Correspondientes: ambos están del mismo lado de la secante, uno fuera de la zona comprendida entre las paralelas y otro dentro, y no son adyacentes.		**Iguales**
Alternos internos: están uno a cada lado de la secante, ambos dentro de la zona comprendida entre las paralelas y no son adyacentes.		
Alternos externos: están uno a cada lado de la secante, ambos fuera de la zona comprendida entre las paralelas y no son adyacentes.		
Conjugados internos: están los dos del mismo lado de la secante, ambos dentro de la zona comprendida entre las paralelas.		
Conjugados externos: están los dos del mismo lado de la secante, ambos fuera de la zona comprendida entre las paralelas.		

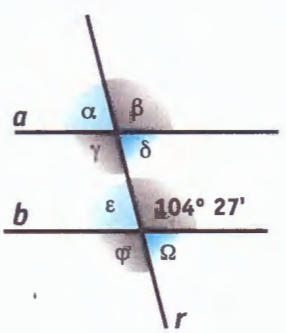
31 Calculen la medida de los ángulos señalados con letras griegas en la figura. Justifiquen los cálculos que realicen.

.....

.....

.....

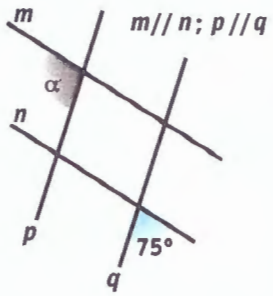
.....



a // b, r es secante

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

32 Averigüen la medida del $\hat{\alpha}$ y expliquen cómo la hallaron.



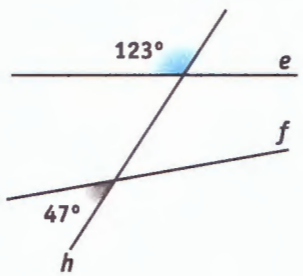
.....

.....

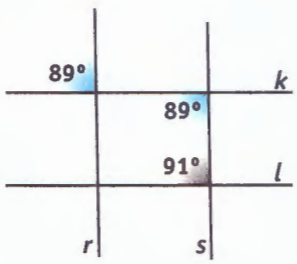
.....

33 En cada uno de los siguientes casos y a partir de la información dada en cada figura, decidan si hay rectas paralelas. Justifiquen sus respuestas.

a)



b)



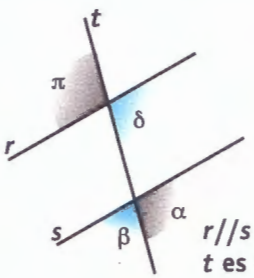
.....

.....

.....

.....

34 Calculen la medida de $\hat{\beta}$ y $\hat{\delta}$, sabiendo que $\hat{\alpha} = 2\hat{x} + 30°$ y $\hat{\pi} = \hat{x} + 80°$. Justifiquen cada paso que realicen para llegar a la solución.



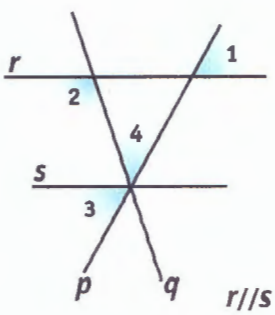
r//s
t es secante

.....

.....

35 Dibujen dos ángulos opuestos por el vértice y tracen las bisectrices de cada uno de ellos. ¿Qué ángulo forman entre sí las bisectrices de los ángulos opuestos por el vértice?

36 Calculen la medida de los ángulos 1, 2 y 3, sabiendo que $\hat{4} = 43° 28''$ y $\hat{1} = \frac{2}{3} \cdot \hat{2}$.



r//s

.....

.....

.....

37 Calculen $\hat{A}$ y $\hat{B}$ sabiendo que son adyacentes y, además, $\hat{A} = 2\hat{x} + 12°$ y $\hat{B} = 5\hat{x} - 10° 30'$.

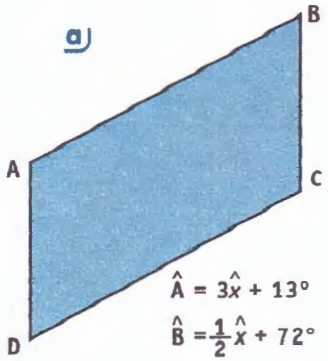
.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

38 En la clase de Matemática estaban resolviendo en grupos problemas sobre ángulos. El grupo de Martín llegó a la conclusión de que, con los datos que se muestran en las figuras, alcanza para determinar si los cuadriláteros tienen lados paralelos, mientras que el grupo de Aldana dice que no es posible decidir con esos datos si las figuras tienen lados paralelos.

¿Cuál de los dos grupos tiene razón? ¿Por qué?

a)



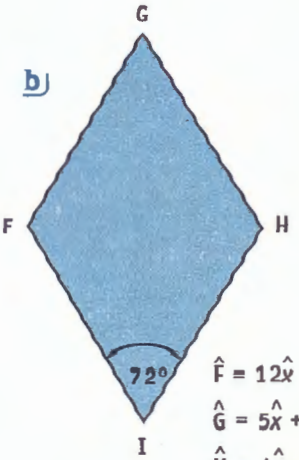
$\hat{A} = 3\hat{x} + 13°$

$\hat{B} = \frac{1}{2}\hat{x} + 72°$

$\hat{C} = 3\hat{x} + 3°$

$\hat{D} = 4\hat{x} - 43°$

b)



$\hat{F} = 12\hat{x} + 36°$

$\hat{G} = 5\hat{x} + 12°$

$\hat{H} = 4\hat{x} + 60°$

39 Calculen la medida de cada uno de los ángulos interiores de los cuadriláteros de la actividad anterior.

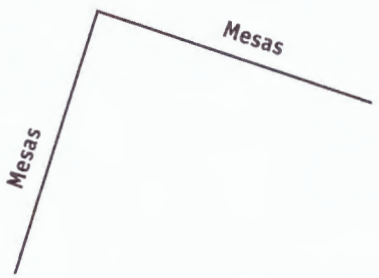
40 El croquis corresponde a la distribución de mesas de un evento. Su organizadora, Mariela, quiere colocar la mesa de los dulces en un espacio que se encuentre a la misma distancia de ambas filas de mesas.

¿Dónde podrá ubicarla? ¿Por qué?

.....

.....

.....

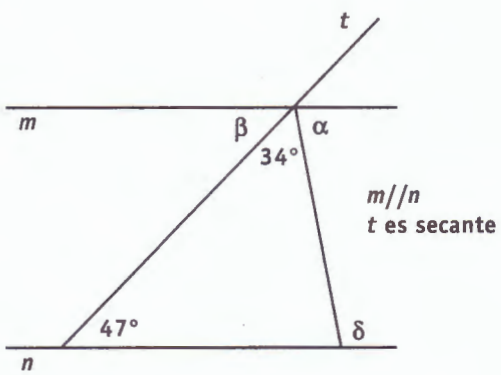


41 Averigüen la amplitud de los ángulos α, β, y δ en la siguiente figura. Justifiquen sus respuestas.

.....

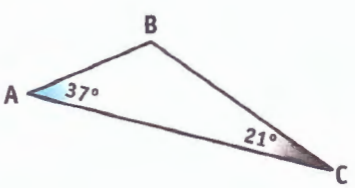
.....

.....

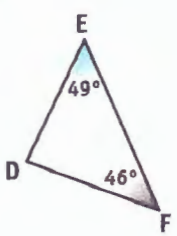


42 Calculen, en cada caso, la medida del ángulo interior que no está indicada en el triángulo.

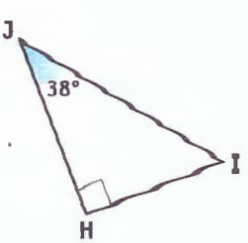
a)



b)



c)

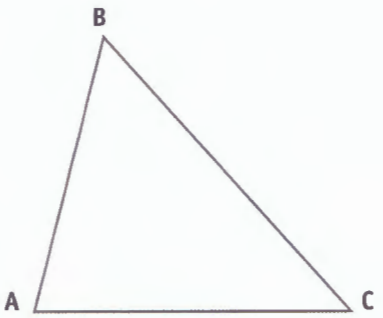


© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Ángulos en el triángulo

Los ángulos interiores

43 Vamos a demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Para ello consideren un triángulo ABC cualquiera, como el de la figura.



a) Tracen una recta paralela al lado AC que pase por el vértice B.

b) Señalen los ángulos que quedan determinados a derecha e izquierda del ángulo B; llámenlos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$, respectivamente.

c) Indiquen cómo se relacionan $\hat{A}$ y $\hat{\alpha}$. Justifiquen.

.....

d) Indiquen cómo se relacionan $\hat{C}$ y $\hat{\gamma}$. Justifiquen.

.....

e) ¿Cuál es la amplitud de la suma de $\hat{\alpha}$, $\hat{B}$ y $\hat{\gamma}$?

.....

f) Enuncien en forma general la propiedad demostrada.

.....

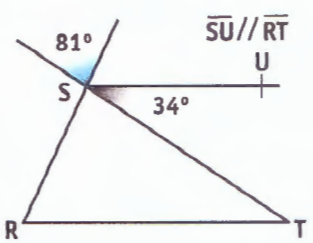
.....

44 ¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo si uno de ellos es 27° menor que el otro?

.....

.....

45 Calculen la medida de los ángulos interiores del $\widehat{RST}$. Justifiquen los procedimientos que realicen.



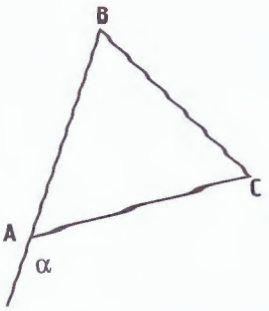
.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Los ángulos exteriores

46 En un triángulo, llamamos *ángulo exterior* a un ángulo que sea adyacente a uno interior.
En el triángulo de la figura está marcado el ángulo exterior $\hat{\alpha}$.
Señalen los otros dos ángulos exteriores del triángulo ABC.



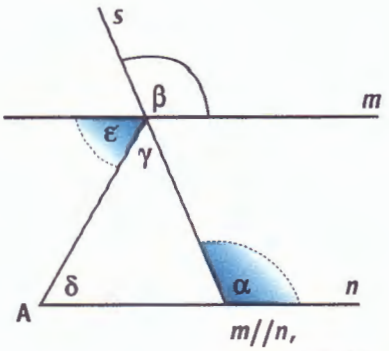
47 Observen la figura.

a) Indiquen la relación que existe entre $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

b) Indiquen la relación que existe entre $\hat{\delta}$ y $\hat{\varepsilon}$.

c) ¿Cómo resultan el ángulo β y el ángulo (ε + γ)? ¿Por qué?

d) Enuncien una conclusión respecto de la relación que existe entre cada ángulo exterior de un triángulo y los dos interiores no adyacentes a él.

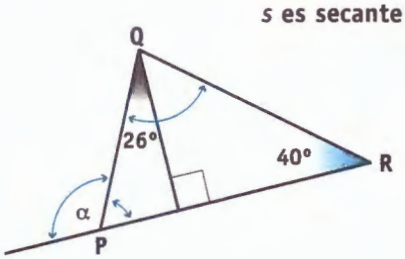


m//n,
s es secante

48 Hallen la medida de $\hat{\alpha}$, $\hat{P}$ y $\hat{Q}$. Justifiquen los pasos que realicen.

.....

.....



49 Calculen las medidas de los ángulos interiores y de los ángulos exteriores de cada uno de los siguientes triángulos.

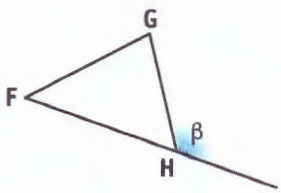
a) $\widehat{ABC}$ rectángulo; $\hat{A} = 32° 45'$ .....

b) $\widehat{ABC}$ isósceles; $\hat{A} = 40° 25' 30''$; $\hat{A} = \hat{B}$ .....

c) $\widehat{ABC}$ isósceles; $\hat{A} = 80° 20''$; $\hat{B} = \hat{C}$ .....

50 Demuestren que la suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360°.

51 Calculen las medidas de los ángulos interiores $\hat{F}$, $\hat{G}$, $\hat{H}$ y del ángulo exterior $\hat{\beta}$ ubicados de acuerdo con la figura de análisis, para cada uno de los siguientes casos.



a) $\hat{F} = 2\hat{x} + 14°$ $\hat{G} = 5\hat{x} - 3°$ $\hat{H} = 6\hat{x} + 13°$

b) $\hat{\beta} = 3\hat{m} + 46°$ $\hat{H} = 6\hat{m} - 28°$ $\hat{F} = \hat{G}$

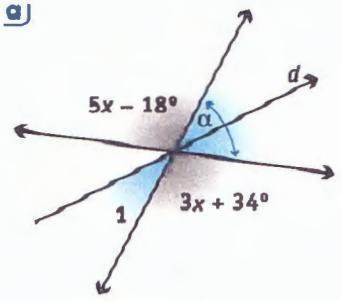
c) $\hat{F} = 2\hat{x}$ $\hat{G} = 2\hat{F}$ $\hat{H} = \frac{3}{2}\hat{F}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

52 Calculen $\hat{A}$ y $\hat{B}$ sabiendo que son adyacentes y, además, $\hat{A} = 3\hat{x} + 24°$ y $\hat{B} = 4\hat{x} - 22° 30'$.

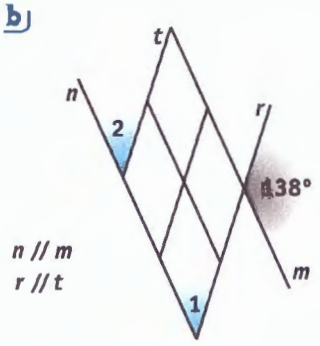
53 Teniendo en cuenta la información dada en cada figura, calculen la amplitud de los ángulos indicados con números.

a)



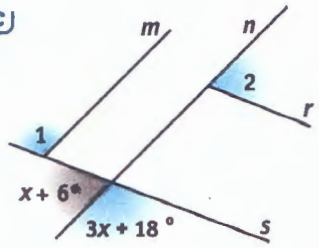
$\vec{d}$ es bisectriz del $\hat{\alpha}$

b)



n // m
r // t

c)



n // m
r // s

.....

.....

.....

.....

.....

.....

54 Realicen la construcción pedida y, luego, contesten a las preguntas.

a) Tracen la mediatriz del segmento AB.

A _____ B

b) Construyan un triángulo con dos de sus vértices en A y en B, y con el tercer vértice en un punto cualquiera de la mediatriz del segmento AB.

c) ¿Qué clase de triángulo es? ¿Por qué?

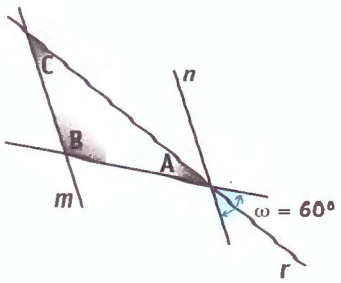
.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

55 Hallen la medida de los ángulos A, B y C sabiendo que $\vec{r}$ es bisectriz de $\hat{\omega}$ y $m // n$. Expliquen los procedimientos realizados.



.....

.....

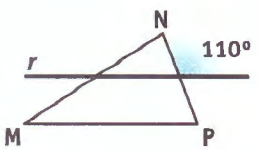
.....

56 Calculen la medida de cada uno de los ángulos interiores del triángulo ABC sabiendo que $\hat{A} = 2\hat{x} - 11°$; $\hat{B} = \hat{x} + 14°$ y $\hat{C} = 5\hat{x} - 23°$.

.....

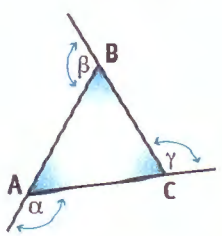
.....

57 Hallen la amplitud de $\hat{M}$, $\hat{N}$ y $\hat{P}$ sabiendo que r es paralela a $\overline{MP}$ y que $\hat{P}$ es el doble de $\hat{M}$. Expliquen los procedimientos realizados.



.....

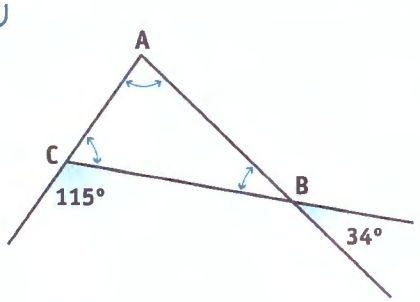
58 De acuerdo con la figura de análisis, completen el cuadro sabiendo que cada línea corresponde a un mismo triángulo.



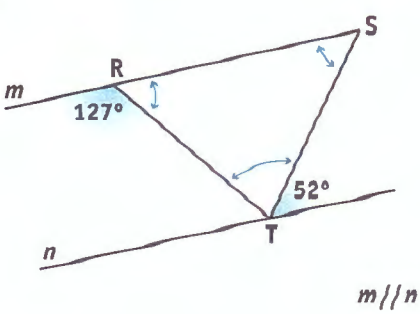
$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
30°	45°				
		25°15′	50°		
				160°	100°
115°20′					125°20′

59 Calculen los ángulos interiores de cada triángulo.

a)



b)



.....

.....

.....

.....

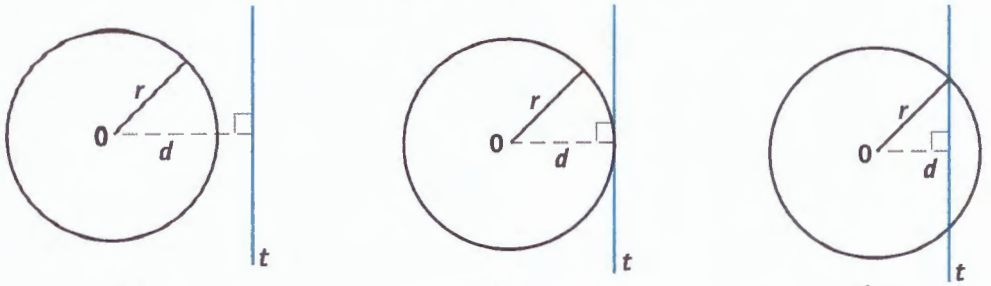
© Aique Grupo Editor S.A. Prohibida su reproducción.

Rectas y circunferencias

Para leer y recordar

- En cada figura, pueden observar la circunferencia de centro O y radio *r*, y la recta *t*, en las tres posiciones en que puede estar en relación con la circunferencia.

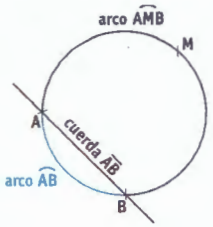
d es la distancia del centro de la circunferencia a la recta.



$d > r$ $d = r$ $d < r$

t es *exterior* a la circunferencia. *t* es *tangente* a la circunferencia. *t* es *secante* a la circunferencia.

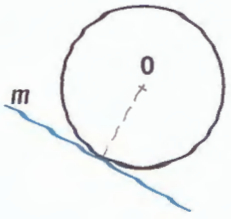
- Una recta secante determina en la circunferencia una *cuerda* $\overline{AB}$ y dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{AMB}$.



60 Construyan un segmento AB de 3 cm y tracen una recta *t* perpendicular al segmento que pase por el punto A. Con centro en B, tracen tres circunferencias, de modo que *t* resulte, respectivamente, exterior, secante y tangente a cada una de ellas.

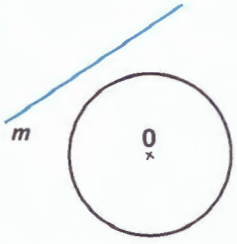
61 En cada uno de los siguientes casos, clasifiquen la recta según su posición relativa a la circunferencia.

a)



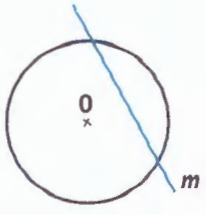
.....

b)



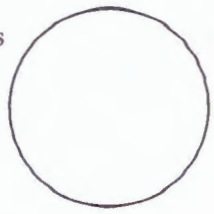
.....

c)



.....

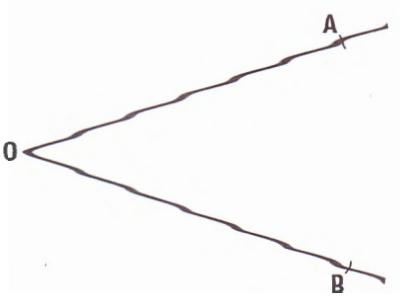
62 Determinen gráficamente el centro de la circunferencia de la figura siguiendo las instrucciones.



- Tracen dos cuerdas en la circunferencia que no sean paralelas.
- Tracen las mediatrices de cada una de las cuerdas.
- El punto de intersección de las mediatrices es el centro de la circunferencia.

© Aique Grupo Editor S.A. Prohibida su reproducción.

63 Tracen la bisectriz de $A\hat{O}B$. Sobre la bisectriz, marquen el punto P, a 3 cm de O. Hagan los trazados necesarios, midan la distancia de ese punto a cada uno de los lados del ángulo y anoten esas medidas aproximadas en milímetros.



.....

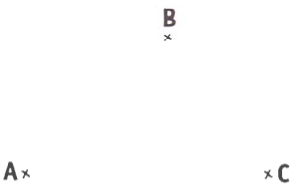
64 Dibujen un ángulo de 65° y tracen su bisectriz. Luego tracen una circunferencia tal que los dos lados del ángulo sean tangentes a ella.

a) ¿Dónde ubicaron el centro?

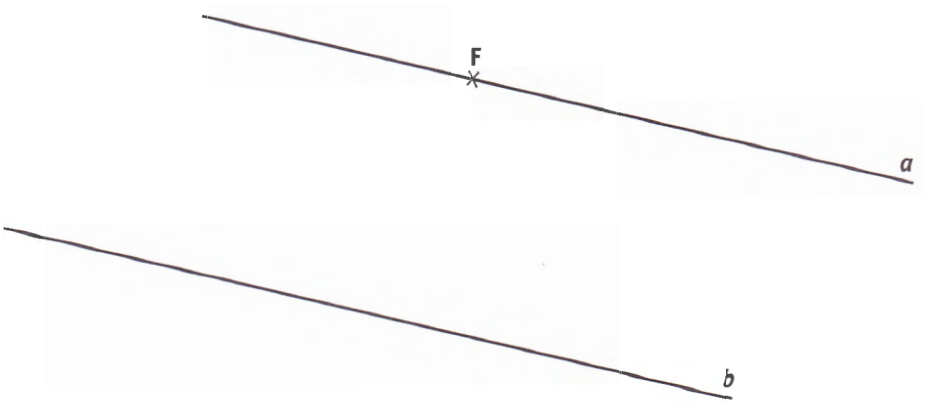
b) Determinen gráficamente la distancia del centro de la circunferencia a los puntos de tangencia.

65 Determinen gráficamente la circunferencia que pasa por los tres puntos A, B y C, que están marcados en la figura, siguiendo las instrucciones.

- Tracen los segmentos AB y BC.
- Construyan las mediatrices de ambos segmentos.
- El centro de la circunferencia se encuentra en el punto de intersección de las mediatrices, y su radio es la distancia entre este punto y cualquiera de los tres originales. Tracen la circunferencia.



66 En la figura, hagan los trazados necesarios para medir con una regla la distancia del punto F a la recta *b*.



a // *b*

a) ¿Dónde habría que ubicar el centro de una circunferencia para que las dos rectas sean tangentes a ella?

.....

b) Tracen una circunferencia tal que ambas rectas sean tangentes a ella.

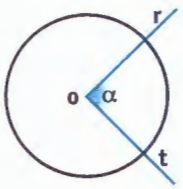
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Ángulos en la circunferencia

Para leer y recordar

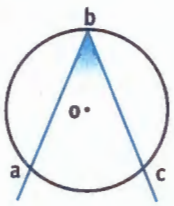
Ángulo central

Un ángulo central tiene su vértice en el centro de la circunferencia y abarca un arco de ella. Un arco de circunferencia tiene asociada una medida angular: la del ángulo central que le corresponde.



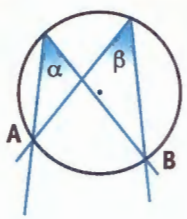
Ángulo inscripto

Un ángulo inscripto tiene su vértice en la circunferencia y sus lados cortan a esta.



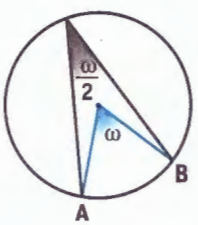
Algunas propiedades

- Los ángulos inscriptos que abarcan un mismo arco son iguales.

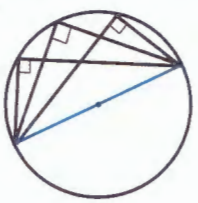


$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

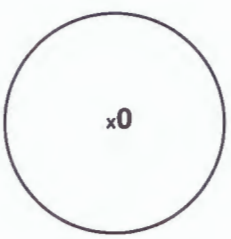
- Todo ángulo inscripto es igual a la mitad del central correspondiente.



- Todos los ángulos inscriptos que abarcan una semicircunferencia son rectos.



67 En la circunferencia, dibujen un ángulo inscripto de 50° y un ángulo central que abarque el mismo arco.



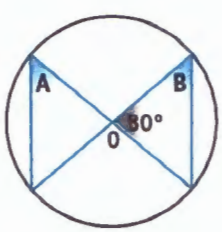
68 ¿Cuál es la amplitud de un ángulo β inscripto en un arco de circunferencia, si el ángulo central que abarca el mismo arco mide 89°?

.....

69 En las siguientes figuras, hallen las medidas de los ángulos señalados con letras. Justifiquen los procedimientos que utilicen.

a)

b)



.....

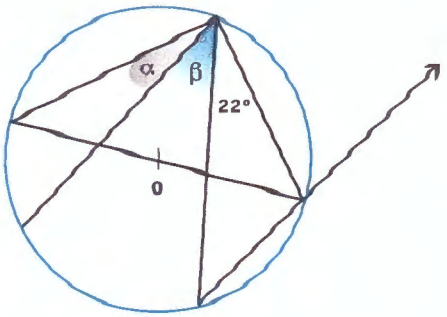
.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

70 Averigüen la amplitud de $\hat{\alpha}$, sabiendo que $\hat{\beta} = 2\hat{\alpha} - 19°$. Justifiquen sus procedimientos.

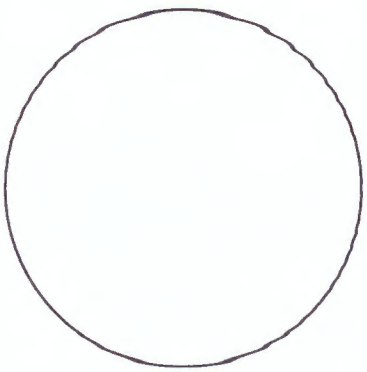


.....

.....

.....

71 Marquen el centro de la circunferencia de la figura. Luego, tracen un ángulo inscripto de 60°. Marquen el ángulo central correspondiente e indiquen su amplitud.



.....

.....

72 Realicen la construcción pedida, y luego, respondan a las preguntas.

a) Tracen una recta *r* y un punto M que no pertenezca a la recta.

b) Con centro en M, tracen tres circunferencias: una exterior, una tangente y otra secante.

c) Llamen A y B a los puntos que resultan al cortar la circunferencia secante con la recta *r*, y C al punto que determina sobre *r* la tangente.

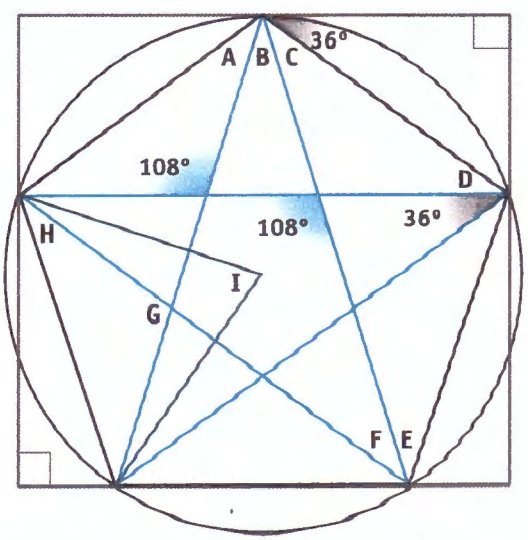
d) ¿Cómo son los segmentos AM y BM? ¿Por qué?

.....

e) ¿Cómo son los segmentos MC y AB? ¿Por qué?

.....

73 Utilicen los datos de la figura para calcular los ángulos señalados con letras.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Construcciones posibles y construcciones imposibles

74 Cuando realizamos construcciones geométricas, las medidas de las figuras deben respetar las propiedades de estas para que se pueda llevar a cabo la construcción. Determinen en cuáles de los siguientes casos es posible construir la figura que se pide.
En los casos en que sea posible, muestren un ejemplo, y en los casos en que no lo sea, indiquen cuál es la propiedad que no se cumple.

a) Las medidas (en grados) de los ángulos interiores del triángulo MNP son tres números consecutivos.

.....

b) El triángulo ABC es acutángulo y tiene un ángulo exterior agudo.

.....

c) En el triángulo RST, $\hat{R}$ es obtuso y $\hat{S} + \hat{T} = \hat{R}$.

.....

d) El cuadrilátero ABCD tiene sus cuatro ángulos obtusos.

.....

e) El cuadrilátero EFGH tiene tres ángulos exteriores agudos.

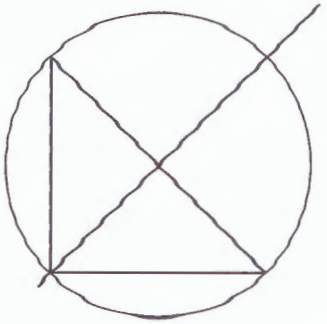
.....

f) El cuadrilátero JKLM tiene un ángulo recto y tres agudos.

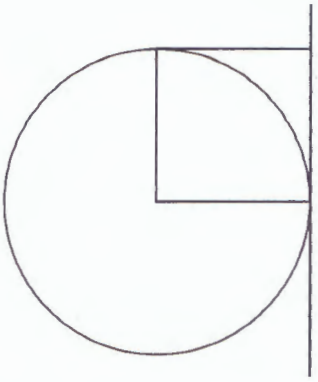
.....

75 Escriban las indicaciones que le darían por teléfono a un compañero para que pueda reproducir las siguientes figuras.

a)



b)



© Aique Grupo Editor S.A. Prohibida su reproducción.

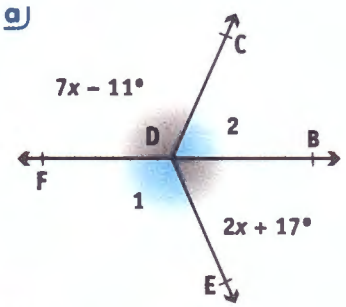
76 En una zona del interior del país construyeron un barrio nuevo. Uno de los problemas que hubo que resolver a medida que se fue habitando el barrio fue la iluminación.

a) En una calle interna hay dos postes de luz representados en el croquis con los puntos P y Q. Ubiquen con una construcción geométrica tres postes más de manera tal que los cinco postes estén a igual distancia uno de otro.

b) Hay un sector destinado a una plaza. Indiquen dónde deberá colocarse una fuente para que esté a la misma distancia de los tres postes de iluminación, indicados con los puntos M, N y O en el esquema de la plaza.

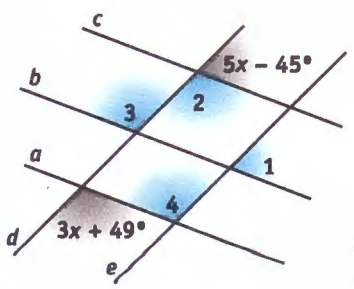
77 Utilizando la información dada en cada figura, calculen los ángulos señalados con números.

a)



$\overrightarrow{DB}$ es bisectriz de $\hat{CDE}$

b)



a // b // c
d // e

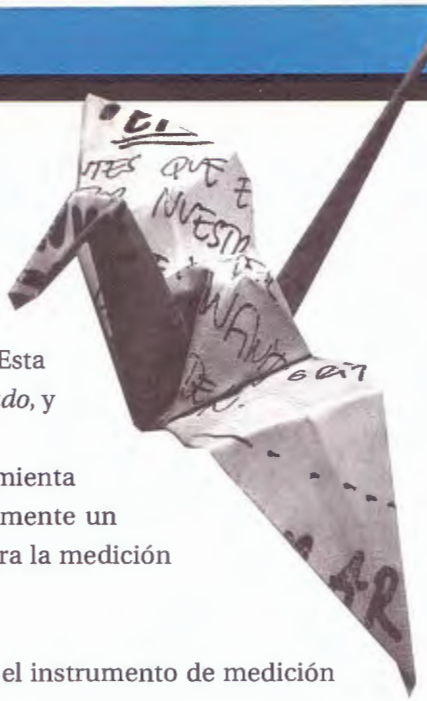
.....

.....

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.



Origami y medición ángulos

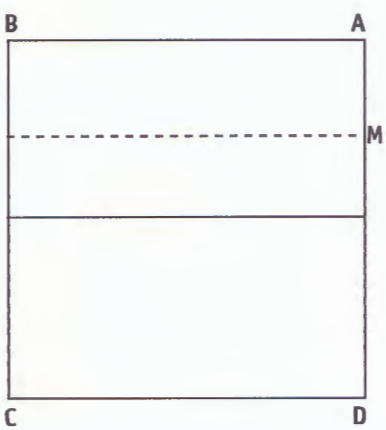
El *origami* es el arte milenario japonés del plegado del papel. Esta palabra proviene de las palabras japonesas *ori*, que significa *plegado*, y *gami* que significa *papel*.
Aplicando las técnicas del *origami*, se puede construir una herramienta para medir ocho ángulos de diferentes medidas, utilizando solamente un cuadrado de papel. Este instrumento les servirá de referencia para la medición de algunos ángulos cuando no cuenten con un transportador.

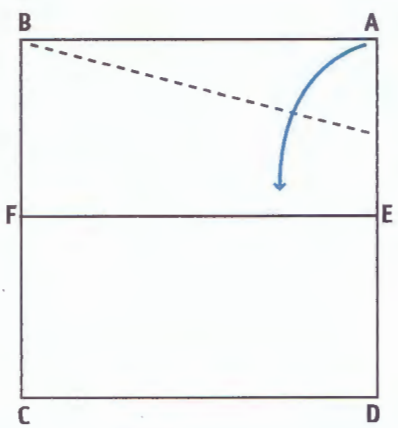
78 Sigan los pasos que se indican a continuación y construyan el instrumento de medición de ángulos.

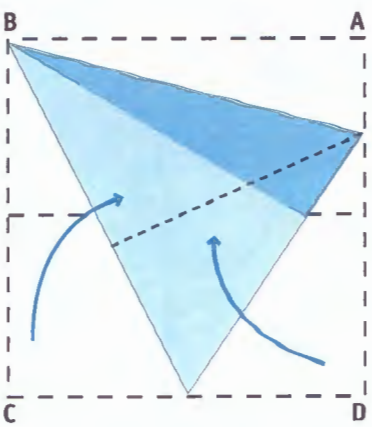
- Doblen un cuadrado de papel como el ABCD por la mitad y desdóblenlo nuevamente.
Luego, doblen una de las mitades y vuelvan a abrir, como se observa en la figura, para marcar el punto M.

- Doblen la esquina superior derecha para abajo, de tal manera que el vértice A caiga sobre el segmento EF.
Asegúrense de que el doblez pase por el vértice B.

- Sin desplegar el doblez anterior, doblen la esquina inferior izquierda hacia arriba hasta que se una con la esquina derecha del cuadrado.
Luego, sin desplegar, lleven el vértice D sobre el doblez anterior, como se muestra en la figura.







© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

79 Observen la figura, que surge al desplegar el cuadrado de papel de la actividad anterior.

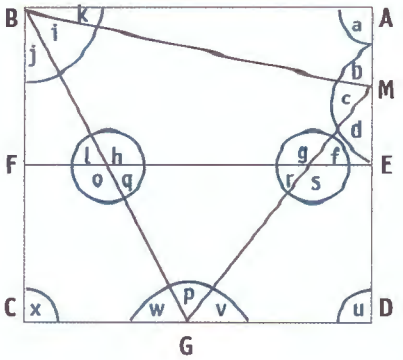
a) Encuentren la medida de los ángulos formados por los dobleces, considerando los triángulos que se fueron conformando, siempre que sea posible. Expliquen cómo los hallaron.

.....

.....

.....

.....



b) Escriban la medida de los ángulos sobre su herramienta de papel y guárdenlo como referencia para la medición de ángulos, cuando lo necesiten.

80 Observen la figura anterior y completen la tabla.

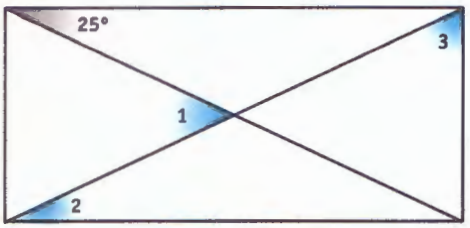
ángulos rectos	ángulos agudos	ángulos obtusos	dos pares de ángulos complementarios	dos pares de ángulos suplementarios

dos pares de ángulos adyacentes	dos pares de ángulos opuestos por el vértice	dos ángulos conjugados internos entre CD//EF y secante BG	dos ángulos alternos externos entre CD//EF y secante GH	dos ángulos correspondientes entre CD//EF y secante BG

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

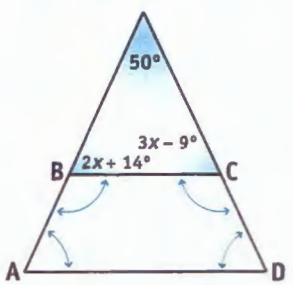
MÁS ACTIVIDADES

81 Hallen la medida de cada uno de los ángulos señalados con números en la figura.



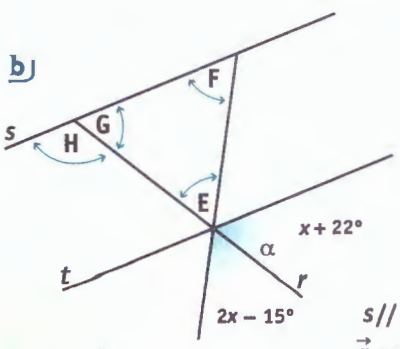
82 Hallen la medida de cada uno de los ángulos señalados con arcos en cada figura.

a)



$\overline{BC} // \overline{AD}$

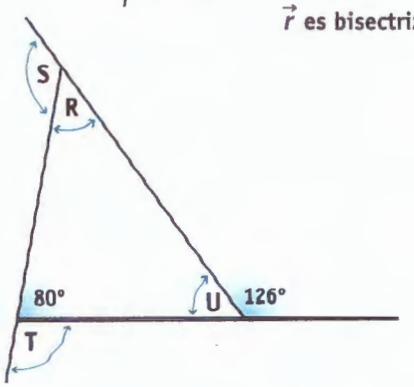
b)



$s // t$

$\vec{r}$ es bisectriz de $\hat{\alpha}$

c)



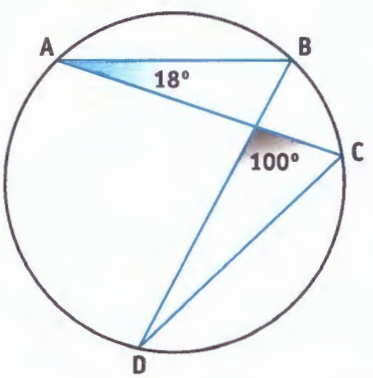
83 Calculen la medida de dos ángulos complementarios, sabiendo que uno de ellos es la mitad del otro.

84 La diferencia entre la amplitud de un ángulo y la de su complemento es de 25°. Calculen la medida de un suplemento de ese ángulo.

85 La medida de un suplemento de un ángulo es el triple de la medida de un complemento del mismo ángulo. ¿Cuál es la medida del ángulo? Representen en una figura la situación.

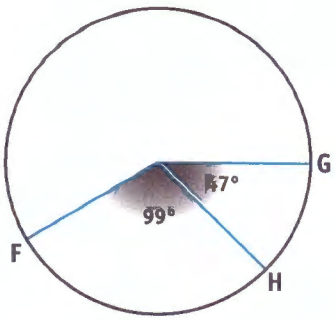
86 Hallen la medida de $\hat{\theta}$ y $\hat{\omega}$, teniendo en cuenta que son complementarios y que la medida de $\hat{\theta}$ es igual a la cuarta parte de la medida de $\hat{\omega}$.

87 Calculen la amplitud de los ángulos $B\hat{D}C$, $A\hat{C}D$ y $A\hat{B}D$. Justifiquen todos los pasos que realicen.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

88 ¿Cuál es la medida del ángulo GHF? ¿Por qué?



89 En una zona rural se quiere instalar una escuela en un punto D, que sea equidistante de las ciudades A, B y C, representadas por puntos en la figura.

a) Determinen la posición del punto D mediante una construcción geométrica.

b) Suponiendo que en la representación gráfica 1 cm representa 1 km, tomen las medidas necesarias con una regla y calculen estimativamente a qué distancia de la escuela quedará cada ciudad.

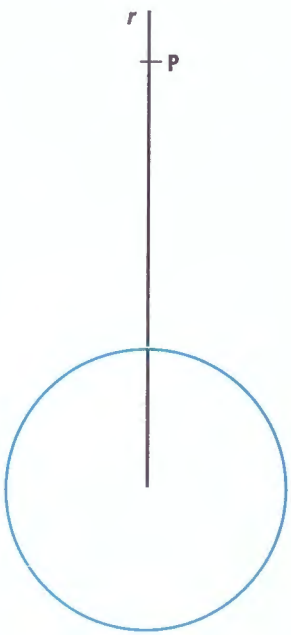
90 Realicen las construcciones geométricas pedidas y luego respondan a la pregunta planteada.

a) Determinen el centro de la circunferencia de la figura y llámenlo O.

b) Con centro en un punto de la recta *r*, tracen una circunferencia de 1 cm de radio que sea tangente exterior con la de la figura.

c) Tracen las rectas tangentes a la circunferencia de 1 cm de radio que pasen por el punto P; llámenlas *s* y *t*.

d) ¿Qué posición tienen las rectas *s* y *t* respecto de la circunferencia dada en la figura?



91 Los ángulos $\hat{\lambda} = 4\hat{x} - 20°$ y $\hat{\omega} = 55° - \hat{x}$ son alternos internos entre paralelas.

a) Calculen la medida de $\hat{x}$, $\hat{\lambda}$ y $\hat{\omega}$.

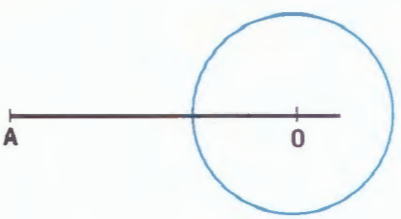
b) Calculen la amplitud de un ángulo $\hat{\beta}$ conjugado interno con $\hat{\omega}$.

c) Realicen una figura de análisis ubicando en ella $\hat{x}$, $\hat{\omega}$ y $\hat{\beta}$.

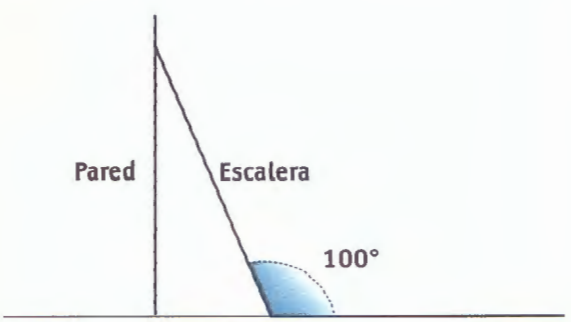
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

92 Tracen rectas tangentes a la circunferencia, que pasen por un punto A determinado, siguiendo las siguientes instrucciones.

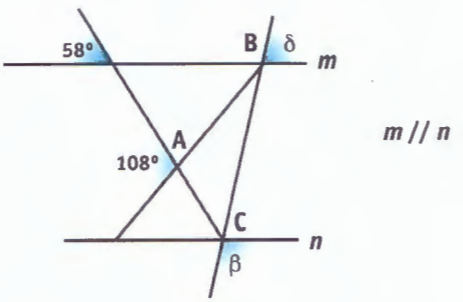
- Hallen el punto medio del segmento AO y llámenlo M.
- Con centro en M y radio $\overline{MO}$, tracen un arco que corte a la circunferencia en dos puntos.
- Unan cada uno de los puntos de corte con el punto A. Las dos rectas trazadas son tangentes a la circunferencia.
- Verifiquen que ambas rectas sean perpendiculares al radio de la circunferencia.



93 ¿Cuál es la amplitud del ángulo que determina la escalera con la pared teniendo en cuenta los datos de la figura? ¿Por qué?

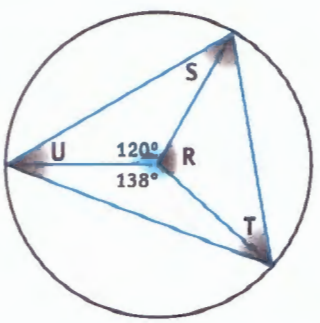


94 Calculen la medida de los ángulos interiores del triángulo ABC, sabiendo que $\hat{\delta} = 5\hat{x} - 30°$ y $\hat{\beta} = 5\hat{x} + 10°$.



$m // n$

95 Calculen la medida de los ángulos R, S, T y U. Expliquen sus procedimientos.



96 En el triángulo ABC, el ángulo A es 10° mayor que el $\hat{B}$ y 40° menor que el $\hat{C}$. Hallen las medidas de los ángulos A, B y C.

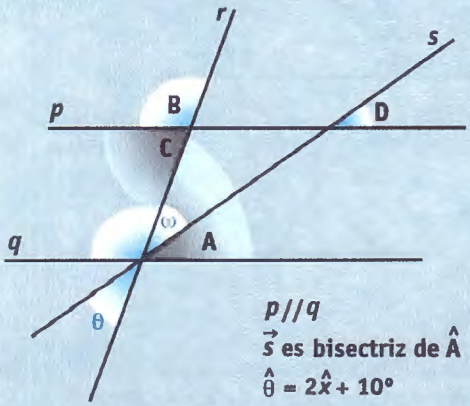
97 Expliquen por qué un triángulo no puede tener dos ángulos rectos ni dos ángulos obtusos.

98 ¿A qué distancia deben ubicarse los centros de dos circunferencias de 2 cm y 3 cm de radio, respectivamente, para que resulten tangentes exteriores? Verifiquen su respuesta realizando un gráfico.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

1 Averigüen la medida de los ángulos A, B, C y D.



$p // q$

$\vec{s}$ es bisectriz de $\hat{A}$

$\hat{\theta} = 2\hat{x} + 10°$

$\hat{\omega} = \hat{x} + 25°$

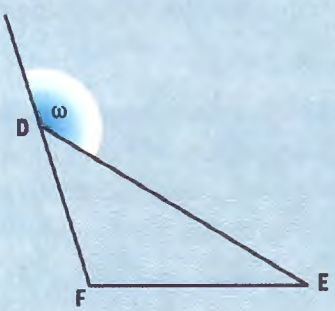
2 Los ángulos $A = 3x + 20°$ y $B = x + 46°$ son opuestos por el vértice.

a) Calculen la medida de los ángulos x, A y B.

b) Calculen la amplitud de un ángulo P, adyacente a $\hat{B}$.

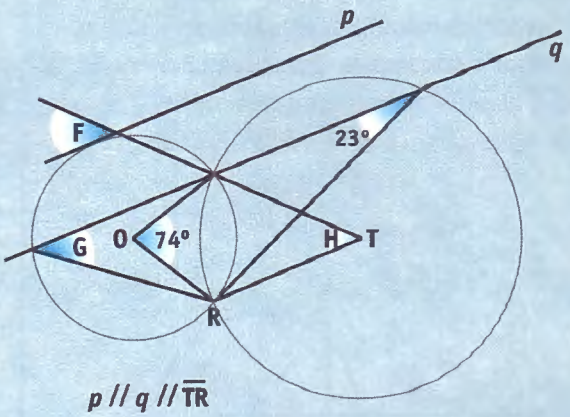
c) Realicen una figura de análisis ubicando en ella los ángulos A, B y P.

3 Hallen la medida de los ángulos interiores del triángulo DEF sabiendo que: $\hat{\omega} = 155°$ y $\hat{F} = 4\hat{D} + 5°$.



4 Cuál es la medida de un ángulo central inscripto en un arco de circunferencia si un ángulo inscripto en la misma circunferencia que abarca el mismo arco mide 68°?

5 Tengan en cuenta la siguiente figura de análisis y resuelvan las actividades.



$p // q // \overline{TR}$

a) Averigüen la medida de los ángulos F, G y H.

b) ¿Cuál es la posición relativa de la recta p respecto de la circunferencia de menor radio?

c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta p respecto de la circunferencia de mayor diámetro?

d) ¿Cuál es la posición relativa de la recta q respecto de cada circunferencia?

e) Dibujen una circunferencia tangente exterior a la circunferencia de mayor diámetro.

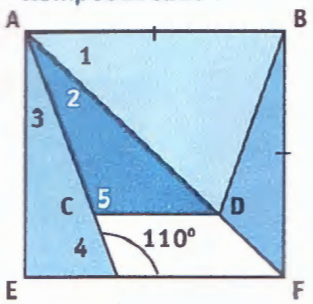
6 Dos circunferencias tienen sus centros separados por 4 cm y el radio de una de ellas es de 3 cm. ¿Cuál puede ser la medida del radio de la otra circunferencia para que sean secantes? Verifiquen su respuesta realizando un gráfico.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

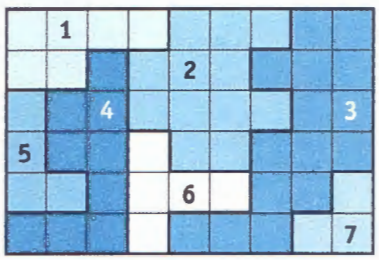
ACTIVIDADES INTEGRADORAS

Observen las siguientes figuras, que representan dos rompecabezas, uno cuadrado y el otro rectangular, y resuelvan las consignas.

Rompecabezas 1



Rompecabezas 2



1 Hallen la medida de los ángulos señalados con números en el rompecabezas 1. Justifiquen sus respuestas.

.....

.....

.....

.....

2 Para el rompecabezas 1, escriban las instrucciones que le darían por teléfono a un compañero para que lo arme, si él tiene las partes separadas.

.....

.....

3 Para el rompecabezas 2, indiquen qué porcentaje del área de la figura armada le corresponde a cada pieza, aproximadamente.

Pieza 1: ..... **Pieza 5:** .....

Pieza 2: ..... **Pieza 6:** .....

Pieza 3: ..... **Pieza 7:** .....

Pieza 4: .....

4 Para el rompecabezas 2, anoten qué fracción de la pieza 1 representa el área de cada una de las demás piezas.

Pieza 2: ..... **Pieza 5:** .....

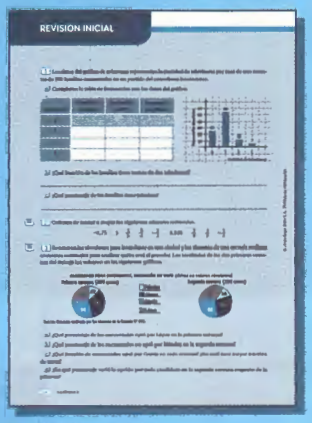
Pieza 3: ..... **Pieza 6:** .....

Pieza 4: ..... **Pieza 7:** .....

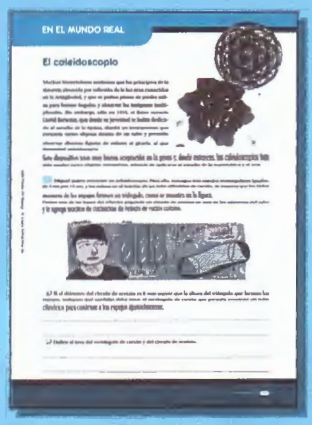
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Cómo son estos cuadernillos

Apertura
Una situación disparadora es el eje que abre cada capítulo.



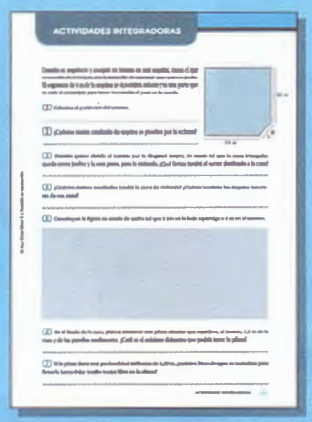
Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.



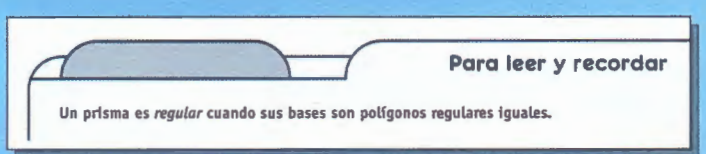
En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados a aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.

Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.

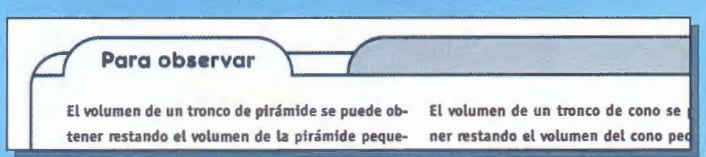
Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.



Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 3, 5 y 8, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.



Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).


Para observar
El volumen de un tronco de pirámide se puede obtener restando el volumen de la pirámide peque-
El volumen de un tronco de cono se
ner restando el volumen del cono pe

Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

Este ícono indica que la actividad debe ser resuelta en una hoja aparte.

Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE